

УДК 533.93:537.523.5

**НЕРЕГУЛЯРНОСТЬ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕНБААСА-ГЕЛЛЕРА
ДЛЯ КАНАЛА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДУГИ****В.А. Жовтянский¹, Э.П. Колесникова², Ю.И. Лелюх¹,
П.В. Порицкий³, Я.В. Ткаченко¹, Ю.А. Гончарук¹**¹Институт газа Национальной академии наук Украины, 03113, Киев, ул. Дегтяревская 39²Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»,
03056, Киев, пр. Победы 37³Институт ядерных исследований Национальной академии наук Украины, 03680, Киев, пр. Науки 47
E-mail: zhovt@ukr.net**Аннотация**

На основе численного моделирования показана нерегулярность решений уравнения Эленбааса-Геллера при определении радиальной структуры канала электрической дуги. Она обусловлена немонотонностью коэффициента теплопроводности. Расчеты выполнены на примере медно-воздушной плазмы, в которой этот коэффициент имеет ярко выраженные максимумы. Кратко представлены методика и результаты определения транспортных коэффициентов в медно-воздушной плазме с различным соотношением компонент. Результаты расчетов позволяют оценить роль процессов переноса энергии в формировании радиальной структуры канала электрической дуги и зависимости напряженности электрического поля от величины разрядного тока.

Ключевые слова: электрическая дуга, уравнение Эленбааса-Геллера, теплопроводность, медно-воздушная плазма, коэффициенты переноса энергии

Введение

Одно из несомненных преимуществ электрической дуги – ее высокая энергоэффективность. Это, собственно, и обуславливает ее многочисленные технологические применения. Действительно, дуга позволяет пропускать значительные токи в ионизированной атмосфере газа или паров металлов (полученных за счет эрозии поверхностей электродов при протекании разрядного тока) при относительно небольшом напряжении или – проводя параллель с критериями энергоэффективности для электроэнергетических систем – потерях мощности на их транспорт. Эти преимущества обусловлены оптимальным сочетанием поверхностных (другими словами, приэлектродных и пристеночных) и объемных свойств плазмы в токопроводящем канале дуги [1].

Одним из направлений повышения энергоэффективности в плазменных энерготехнологических процессах является использование неравновесных свойств плазмы, в частности эффектов, обусловленных переносом резонансного излучения в канале электрической дуги [2–4]. Характер этой неравновесности зависит, в первую очередь, от градиентов радиального распределения заселения резонансных и метастабильных уровней плазмообразующих атомов. Поэтому необходимо как

можно точнее определять пространственный профиль параметров плазмы. Решению этой проблемы посвящается данная работа.

В настоящей работе исследования проведены на примере свободногорящей электрической дуге между испаряющимися медными электродами. Она является простейшим и широко распространенным объектом исследований, с которого начинались, собственно говоря, исследования электродуговой плазмы [5].

Коэффициент теплопроводности в такой плазме характеризуется ярко выраженными максимумами, соответствующими диссоциативной и ионизационной компонентам реактивной составляющей теплопроводности [6, 7].

Расчет транспортных коэффициентов

Транспортные коэффициенты являются важными характеристиками газопламенных смесей. Если степень ионизации не слишком высока, то эффекты переноса можно рассчитать в лоренцевом приближении, предположив доминирование отдельного вида столкновений. Электронная составляющая этих эффектов в упомянутых условиях является наиболее значимой. Однако с повышением температуры нужно учитывать столкновения тяжелых частиц, как с электронами, так и между собой, что приводит к усложнению процедуры расче-

тов. Методы расчета транспортных коэффициентов разработаны в кинетической теории газов в условиях локального термодинамического равновесия (ЛТР). Для расчетов транспортных свойств наиболее широко используется метод Чепмена-Энскога [8–10], который является хорошо детализированным. Однако объем вычислений по этому методу быстро растет с увеличением порядка приближений. Кроме того, промежуточные результаты не имеют непосредственного физического смысла, поэтому их сложно контролировать. Указанных недостатков лишен метод моментов Греда [11], который может рассматриваться как альтернативный. Расчетная процедура этого метода лучше структурирована и промежуточные стадии легко контролировать с помощью тех или иных упрощений, используя, например, лоренцевое приближение для плазмы.

В этой работе для определения коэффициентов переноса в воздушной плазме с примесью электродного материала – меди (при произвольной концентрации последних) исполь-

зован метод Греда [12, 13]. Он может быть распространен также на плазму в условиях отклонений от ЛТР, например, двухтемпературную. К преимуществам расчетов по этому методу относятся устойчивость к изменению исходных данных, в частности, транспортных интегралов, и конвергенция приближений с увеличением их порядка. Метод позволяет учитывать эффект Рамзауэра-Таунсенда, если он присущ для частиц рассматриваемой среды. Он также позволяет учесть влияние характерного для атома меди эффекта резонанса формы на свойства многокомпонентной плазмы. Метод Греда хорошо применим для расчетов транспортных свойств многокомпонентной термической плазмы.

Пример расчета коэффициента теплопроводности для смеси воздух-пары меди при содержании последних 1% (об.) и его сравнение с хорошо известными работами 80-х гг. [6, 7] приведены на рис. 1 (следует заметить, что в работе [6] учтена единственная составляющая воздуха – азот).

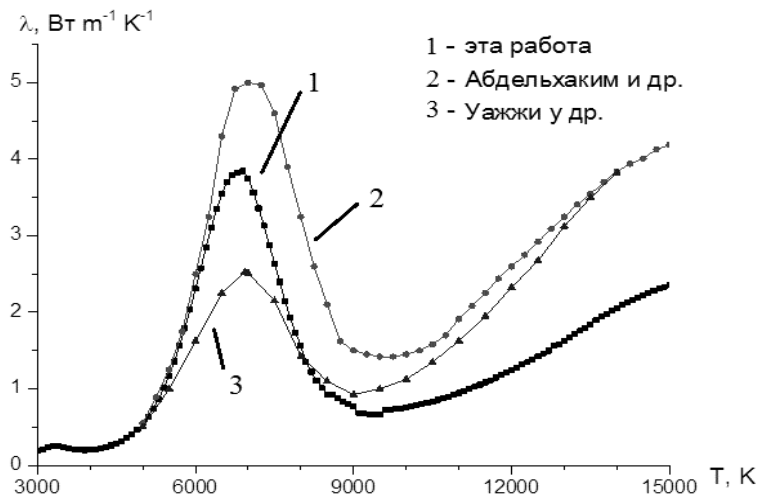


Рис. 1 – Зависимость коэффициента теплопроводности от температуры для плазмы смеси воздух-пары меди при содержании последних 1% (об.), полученная различными авторами

На рис. 2 приведены примеры расчета коэффициентов тепло- и электропроводности для смеси воздух-пары меди при различных содержаниях меди. Результаты расчетов позволяют определить выражения, аппроксимирующие данные коэффициенты переноса. Коэффициент электропроводности имеет следующий вид:

где

$$\sigma = 5,17 \cdot 10^4 \cdot \exp\left(-\frac{27535,09}{T}\right). \quad (1)$$

Здесь σ – в единицах $\text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$, а T – в К.

Общий коэффициент теплопроводности включает теплопроводности тяжелой компоненты (атомы, молекулы, ионы) и электронов:

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_e, \quad (2)$$

$$\lambda_a = 1,32 \cdot 10^{-4} \cdot T^{0,8} + 4,73 \cdot \exp\left(-\left(\frac{T - 6930,77}{1254,36}\right)^2\right) + 3,71 \cdot \exp\left(-\left(\frac{T - 15085,5}{3047,61}\right)^2\right) + 1,27 \cdot \exp\left(-\frac{4881,15}{T}\right), \quad (3)$$

$$\lambda_e = 9,54 \cdot \exp\left(-\frac{28515,7}{T - 449,38}\right). \quad (4)$$

Здесь λ_a и λ_e – в единицах $\text{Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$, а T – в К.

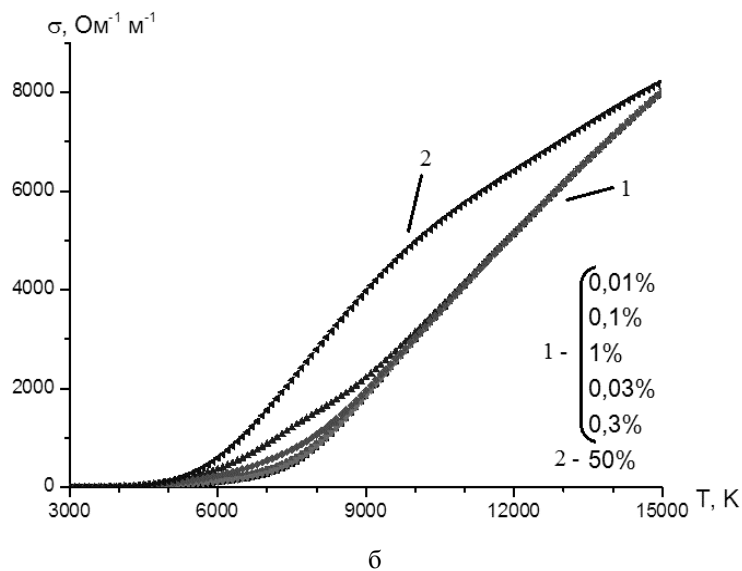
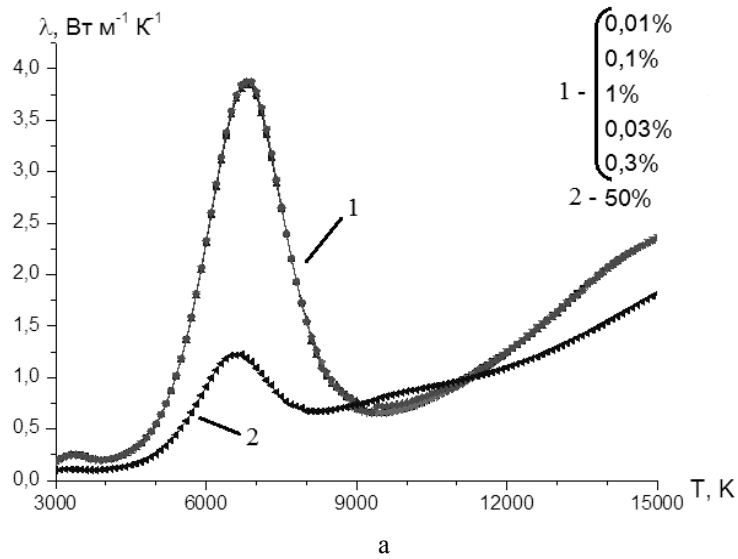


Рис. 2 – Общий вид зависимостей теплопроводности (а) и электропроводности (б) от температуры для плазмы смеси воздух-пары меди при различных содержаниях меди (в объемных единицах)

Следует заметить, что при низких температурах теплопроводность тяжелой компонен-

ты (3) смеси принята эквивалентной чистому азоту, учитывая, что разница между ними в

детальных расчетах [6] стает заметной только при $T > 7000$ К. Таким образом, первый, степенной, член в (3) отвечает низкотемпературной области трансляционной теплопроводности азота с характерным показателем степени 0,8 для ее температурной зависимости [14, 15], два следующих – экспоненциальных – члена отвечают диссоциативной и ионизационной компонентам реактивной составляющей теплопроводности, соответственно; последний экспоненциальный член имеет общий корректирующий характер.

Постановка задачи

Параметры плазмы в своем большинстве являются функциями температуры, радиальное распределение которой определяется уравнением баланса энергии Эленбааса-Геллера. В случае однотемпературного приближения и одномерной осесимметричной дуги оно имеет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\lambda r \frac{dT}{dr} \right) + \sigma E^2 = 0, \tag{5}$$

где r – радиальная координата, T – температура плазмы, $\lambda(T)$ – ее теплопроводность и $\sigma(T)$ – электропроводность, температурные зависимости которых представлены формулами (1)-(4).

Ток дуги I при известной напряженности электрического поля E определяется соотношением:

$$I = 2\pi E \int_0^R \sigma(r) r dr, \tag{6}$$

где R – радиус канала электрической дуги.

Поскольку коэффициент теплопроводности является в общем случае немонотонной функцией температуры, то для его определенного сглаживания часто вводят тепловой потенциал

$$S = \int_0^T \lambda(T) dT \tag{7}$$

Уравнение (5) при этом принимает следующий вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dS}{dr} \right) + \sigma E^2 = 0. \tag{8}$$

Обычно в публикациях, посвященных решению уравнения Эленбааса-Геллера, рассматривают граничные условия Дирихле, т.е. принимается заданной температура стенки совместно с условием симметрии на оси разряда

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0, T|_{r=R} = T_w$$

или

$$\left. \frac{dS}{dr} \right|_{r=0} = 0, S|_{r=R} = S_w, \tag{9}$$

где T_w, S_w – температура или тепловой потенциал на границе канала электрической дуги, обусловленные состоянием внешней среды.

В свободногорящих дугах, в отличие от так называемых стеночностабилизированных [16], существует определенный произвол, связанный с выбором радиуса канала R . Действительно, он определяется в эксперименте, исходя из тех или иных аппроксимаций распределения излучения дуги в ее пограничной области [17]. Более того, само допущение об одномерной осесимметричной дуге является идеализацией. В действительности, свободногорящая дуга между медными электродами имеет эллипсоподобную форму, радиус которой при длине дуги до 8 мм изменяется в пределах 2 – 4 мм [18, 19]. Чтобы избежать дальнейшего осложнения задачи, здесь в рамках численного моделирования мы рассматриваем несколько вариантов ее решения при различных значениях R .

Решение задачи и полученные результаты

Задачу рассматриваем, как и в [2–4], на примере медно-воздушной плазмы, моделирующей свободногорящую дугу между испаряемыми медными электродами. Коэффициенты тепло- и электропроводности являются нелинейными функциями температуры, причем первый из них имеет немонотонный характер, а именно локальные максимумы при температурах около 7000 и 15000 К, как показано на рис. 1. Они обусловлены реактивной составляющей – вкладом переноса энергии диссоциации молекул азота и ионизации атомов меди.

В настоящей работе выполнены расчеты для плазмы воздуха, содержащей 1% (об.) медных паров; коэффициент теплопроводности, использованный в расчетах, представлен кривой λ на рис. 1. Задача решалась методом продолжения решения по параметру [20]. На рис. 3 представлены зависимости поля от тока для значений радиуса разряда $R = 3, 6$ и 10 мм, полученные на основе решения уравнения Эленбааса-Геллера (8) с граничными условиями (9) с использованием указанных значений R . Обращает на себя внимание наличие локальных экстремумов на полученных кривых, которые постепенно размываются и смещаются в область больших токов при увеличении радиуса канала. Наличие этих экстремумов свидетельствует о возможном существовании нескольких температурных профилей и, соответственно, нескольких значений разрядного тока при одном и том же значении напряженности электрического поля.

Можно сделать вывод, что задача имеет нерегулярные решения. Например, напряжен-

ности электрического поля $E = 2210$ В/м в случае $R = 3$ мм может соответствовать четыре значения разрядного тока: 1) $I = 5,84$ А, 2) $I = 30,0$ А, 3) $I = 54,9$ А 4) $I = 1320$ А. Последнее из решений является формальным: оно получено из уравнения (8) при использовании в общем виде температурных зависимостей (1) и (2–4) для σ и λ , соответственно.

Однако фактически при дальнейшем моделировании температурного профиля они выходят за пределы принятого в расчетах коэффициентов переноса верхнего значения температуры $T = 15000$ К и в дальнейшем не рассматриваются. Температурные профили для первых трех значений разрядного тока представлены на рис. 4.

Связь между неоднозначностью решения соответствующей граничной задачи и немонотонностью коэффициента теплопроводности наиболее ярко демонстрирует сопоставление этих данных с рис. 5, на котором представлены радиальные распределения последнего для разных температурных профилей.

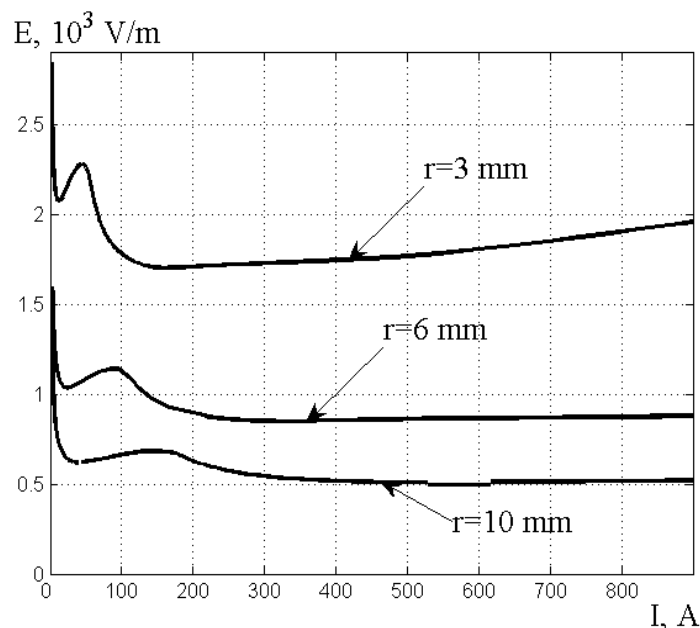


Рис. 3 – Зависимость напряженности электрического поля дугового разряда от тока для различных значений радиуса канала

Действительно, исходя из осевых значений температуры на рис. 4, можно сделать вывод, что профили 1 на рис. 4 и 6 соответствует части кривой теплопроводности до первого локального максимума (рис. 1). Профиль 2 на тех же рисунках соответствует осевым значениям коэффициента теплопроводности в окрестности первого максимума последнего.

Далее, кривые 3 соответствуют значениям коэффициента теплопроводности в локальном минимуме между первым и вторым максимумом (рис. 1). Наиболее показательным является наличие двух дополнительных максимумов в радиальном распределении коэффициента теплопроводности для гипотетического случая, представленного кривой 4 на рис. 5.

Конечно же, реализация того или иного режима горения электрической дуги в соответствии с полученными решениями в области неоднозначных решений уравнения Эленбаасса-Геллера, так же, как и вопрос устойчивости

последних, в конкретных технологических устройствах, должен рассматриваться с учетом нагрузочной характеристики электрической цепи, включающей дуговой разряд [21, с. 361; 22, с. 245].

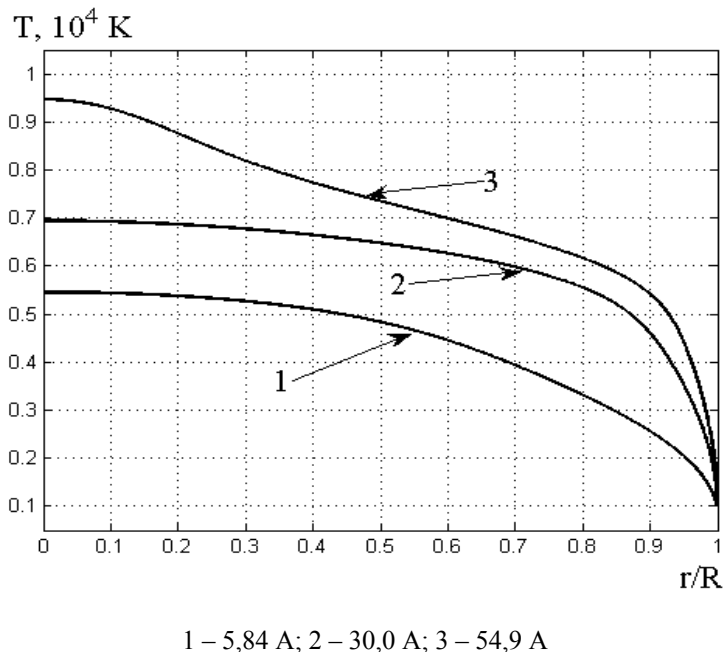


Рис. 4 – Радиальные распределения температуры в канале дуги при напряженности электрического поля $E = 2210$ В/м, которой соответствуют различные значения разрядного тока

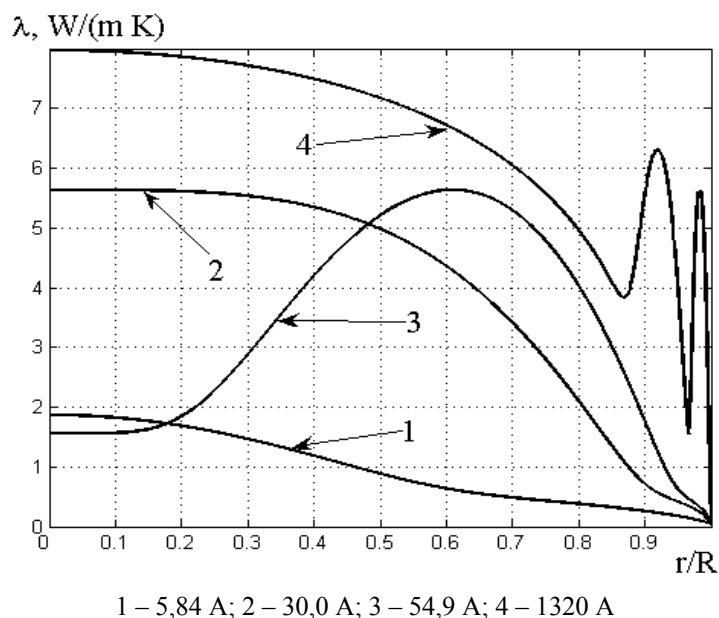


Рис. 5 – Радиальные распределения значений коэффициента теплопроводности в дуге при напряженности электрического поля $E = 2210$ В/м и различных значениях разрядного тока

Следует заметить, что нерегулярность решений уравнения Эленбаасса-Геллера в наиболее близком варианте была отмечена в книге [16 (гл. 7)]. Гораздо ранее радиальные

нерегулярные распределения температуры для электрической дуги в атмосфере азота были получены Филипсом [23].

Определенное сходство наблюдается при сравнении рис. 4 данной работы и рис. 13 цитируемой работы [23]. Однако ее автору не удалось связать обнаруженный эффект с немонотонностью коэффициента теплопроводности.

В целом, экспериментальное обнаружение подобных режимов горения в *нестационарной* дуге проблематично, поскольку уравнение нестационарной теплопроводности, как частный случай уравнений параболического типа, обладает одним существенным недостатком – скоростью распространения тепла принимается бесконечно большой. Поэтому параболические уравнения достаточно хорошо описывают преимущественно медленные процессы с относительно небольшими градиентами. Реальная физическая система электрической дуги может не успеть диссипировать тепло за характерное время периода электрических колебаний в цепи разряда. Таким образом, динамическая модель Филиппса может представлять собой скорее зависимость решения от немонотонности коэффициента теплопроводности в молекулярном газе, нежели установления периодического режима горения дуги.

Значительно позже нерегулярность решений уравнения Эленбаасса-Геллера была получена в уже упомянутой монографии [16]. Авторы обратили внимание на связь этого явления с концентрацией паров металлов в разрядном промежутке. Но поскольку в работе решалась задача Коши для различных наперед определенных значений осевой температуры, авторы получили лишь практически непрерывный спектр температурных профилей различного радиуса без учета непрерывности изменения напряженности электрического поля и силы тока.

В настоящей работе наличие собственно нескольких ветвей решений удалось проследить и однозначно показать их связь с немонотонностью коэффициентов переноса лишь при строгой постановке граничных задач с определением осевой температуры в результате их решения.

Выводы

Несмотря на кажущуюся простоту, уравнение Эленбаасса-Геллера, если исходить из известного авторам объема литературных данных, не стало достаточно распространенным инструментом для исследований электродуговой плазмы. Представленные в этой работе

результаты его применения для исследования свойств плазмы простейших свободнотерящих электрических дуг между испаряемыми медными электродами дополнительно иллюстрируют сложности интерпретации получаемых результатов. Действительно, на основе анализа численных результатов обнаружена нерегулярность решений этого уравнения, связанная с немонотонностью коэффициента теплопроводности в плазме медно-воздушной смеси. В работе получены также наиболее строгие значения транспортных коэффициентов в плазме медно-воздушной смеси при различных содержаниях компонент этой смеси.

Выполнение этой работы поддержано Национальной академией наук Украины в рамках программы «Перспективные исследования по физике плазмы, управляемому термоядерному синтезу и плазменным технологиям», проект №10-15.

Литература

1. Zhovtyansky V.A. Plasmochemical effects and some fundamental problems of the physics of gas discharge // Ukr. J. Phys. – 2008. – V. 53, N 5. – P. 490–496.
2. Финкельбург В., Мекер Г. Электрические дуги и термическая плазма. – М.: ИИЛ, 1961. – 370 с.
3. Жовтянский В.А. Неравновесные свойства электродуговой плазмы атмосферного давления // Горение и плазмохимия. – 2011. – Т. 9, № 4. – С. 310–315.
4. Zhovtyansky V.A., Lelyukh Yu.I., Tkachenko Ya.V. Effect of radiation transfer on a deviation of dense electric-arc plasma from the equilibrium state: criterion approach // Ukr. J. Phys. – 2012. – V. 57, N 3. – P. 311–321.
5. Zhovtyansky V.A., Lelyukh Yu.I. and Tkachenko Ya.V.. Nonequilibrium of the dense nonuniform plasma due to radiation transfer / Invited lecture // XIX Int. Conf. Gas Discharges and their Applications (2nd – 7th September 2012, Beijing, China). Proceedings / Ed. Z.C Guan. – Beijing: Tsinghua University, 2012. – P. 40–47.
6. Abdelhakim H., Dinguirard J.P., Vacquie S. The Influence of Copper Vapour on the Transport Coefficient in a Nitrogen Arc Plasma // J. Phys. D: Appl. Phys. – 1980. – V.13 – P.1427–1438.
7. Ouajji H., Cheminat B., Andanson P. Composition and conductivity of a copper-air plasma // J. Phys. D: Appl. Phys. – 1986. – V.19. – P.1903–1916.

8. Devoto R.S. Transport properties of ionized monatomic gases // *Physics of Fluids*. – 1966. – V. 9, No 6. – P. 1230–1240.
9. Devoto, R. S., Simplified expressions for the transport properties of ionized monatomic gases // *Physics of Fluids*. – 1967. – V. 10, No 2. – P.354–364.
10. Capitelli M., Bruno D., Laricchiuta A. *Fundamental Aspects of Plasma Chemical Physics: Transport*. – NY: Springer, 2013. – 310 pp.
11. Zhdanov V.M. Transport processes in multicomponent plasma. – London and New York: Taylor & Francis, 2002. – 277 pp.
12. Porytsky P., Krivtsun I., Demchenko V., et al. On the application of the theory of Lorentzian plasma to calculation of transport properties of multicomponent arc plasmas // *European Phys. Journ. D.: At. Mol. Opt. and Plasma Phys.* – 2010. – Vol.57, No 1. – P. 77–85.
13. Porytsky P., Krivtsun I., Demchenko V., et al. Transport properties of multicomponent thermal plasma: Grad method versus Chapman-Enskog method // *Physics of Plasmas*. – 2013. – Vol.20, Iss. 2. – P. 023504 (12 pp).
14. Чиркин В.С. Теплофизические свойства материалов ядерной техники / Справочник. – М.: Атомиздат, 1968. – 484 с.
15. Таблицы физических величин. Справочник / Под ред. И.К. Кикоина. – М.: Атомиздат, 1976. – 1006 с.
16. Асиновский Э.И., Кириллин А.В., Низовский В.Л. Стабилизированные электрические дуги и их применение в теплофизическом эксперименте. – М.: Наука, 1992. – 263 с.
17. Бабич И.Л., Веклич А.Н., Жовтянский В.А. Исследование роли самопоглощения излучения в свободногорящих дугах в парах меди методом лазерной диагностики // *Журн. прикл. спектр.* – 1989. – Т.51, N 4. – С.571–575.
18. Zhovtyansky V.A. The interrelation between the departure from LTE and the space modes of electric arc plasma and diagnostic problems // *XXIII Intern. Conf. Phenomena in Ionized Gases (Toulouse, France. July 17-22, 1997): Contr. Papers*. – Toulouse: University Paul Sabatier, 1997. – Vol. II. – P.152 – 153.
19. Бабич И.Л., Веклич А.Н., Жовтянский В.А., Чередарчук А.И. Физические особенности и диагностика плазмы свободногорящей электрической дуги в парах меди // *Инженерно-физический журнал*. – 1998. – Т.71, № 1. – С. 131–138.
20. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформированного тела. – М.: Наука, 1988. – 232 с.
21. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. – М.: Наука, 1987. – 592 с.
22. Капцов Н.А. Физические явления в вакууме и разреженных газах. – М.-Л.: ГТТИ, 1933. – 368 с.
23. Philips R.L. Theory of the non-stationary arc column // *Brit. J. Appl. Phys.* – 1967. – V.18, N.3. – P.65–78.

IRREGULARS OF THE ELENBAAS-HELLER EQUATION SOLUTIONS FOR ELECTRIC ARC CANAL

V.A. Zhovtyansky¹, E.P. Kolesnikova², Yu.I. Lelyukh¹,
P.V. Porytsky³, Ya.V. Tkachenko¹, Yu.A. Honcharuk¹

¹The Gas Institute of the National Academy of Sciences of Ukraine, 03113, Kyiv, Degtyarivs'ka Str. 39

²National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", 03056, Kyiv, Av. Peremohy 37

³Institute for Nuclear Research of the National Academy of Sciences of Ukraine, 03680, Kyiv, Av. Nauky 47

Abstract

The numerical simulation shows the presence of irregular solutions of the Elenbaas-Heller equation in determining the radial structure of the electric arc canal. It is caused by the thermal conductivity nonmonotonic character. The calculations are performed on the example of copper-air plasma, where this conductivity has strongly pronounced maximums. The methodology and results of the determination of the transport coefficients in copper-air plasma with various ratios of the components are presented briefly. The results of calculations allow estimating the role of energy transport processes in the formation of the canal radial structure as well as the formation of the electric field strength dependence on the discharge current magnitude.

Keywords: electric arc, equation-tion Elenbaas-Geller, thermal conductivity, copper and air plasma, transport coefficients of energy

**ЭЛЕКТР ДОҒАСЫНЫҢ КАНАЛЫНА АРНАЛҒАН ЭЛЕНБААС-ГЕЛЛЕР ТЕНДЕУІНІҢ
ЖҮЙЕСІЗ ШЕШІМІ****В.А. Жовтянский¹, Э.П. Колесникова², Ю.И. Лелюх¹,
П.В. Порицкий³, Я.В. Ткаченко¹, Ю.А. Гончарук¹**¹Украина Ұлттық ғылым академиясының газ институты, 03113, Киев, Дегтяревская к., 39²Украина Ұлттық техникалық университеті «Киевский политехнический институт»,
03056, Киев, Победа даңғылы, 37³Украина Ұлттық ғылым академиясының ядролық зерттеулер институты, 03680, Киев, Наука даңғылы, 47**Аннотация**

Электр доғасының каналының радиалды құрылымын анықтау үшін Эленбаас-Геллер теңдеуінің жүйесіз шешімін санды негізде моделдеуі көрсетілген. Бұл жылуөткізу коэффициентінің монотонды еместігімен негізделген. Айқын максимумға ие коэффициент мыс-ауа плазмасы мысалында есептеулер жүргізілді. Әр түрлі қатынастағы компоненттері бар мыс-ауа плазмасындағы транспортты коэффициенттерді анықтау нәтижелері және әдістемесі қысқаша көрсетілген. Есептеулер нәтижесі электр доғасының каналының радиалды құрылымын түзу кезіндегі энергия ауысу процестерінің және ток разрядының мөлшеріне электр өрісінің кернеуіне байланысының ролін бағалауға мүмкіндік береді.

Түйінді сөздер: электр доғалық, теңдеу-ды Elenbaas-Геллер, жылу өткізгіштік, мыс және әуе плазма, энергия тасымалдау коэффициенттері